

ЕКСИТОННИЙ СПЕКТР У ЦИЛІНДРИЧНІЙ КВАНТОВІЙ НАНОТРУБЦІ

М. В. Ткач, О. М. Маханець, А. М. Гришук

*Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича**вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, UA-58012, Україна*

(Отримано 2 січня 2007 р.; в остаточному вигляді — 26 лютого 2007 р.)

Запропоновано теорію екситонного спектра в циліндричній нанотрубці. На основі моделі прямокутних потенціалів і ефективних мас електрона й дірки методом Бете знайдено спектр зв'язаних екситонних станів у нанотрубці.

Розрахована енергія основного стану екситона в наносистемі InP/InAs/InP задовільно корелює з експериментальними вимірами.

Ключові слова: нанотрубка, електрон, екситон.

PACS number(s): 73.21.Nb, 78.67.Ch, 78.67.Lt

І. ВСТУП

Хоча інтенсивність вивчення фізичних процесів у наносистемах не зменшується, однак інтерес до квантових точок, дрітків та плівок виявляється не рівномірний. Так, останнім часом знову збільшилися кількості досліджень складних різновидів квантових дрітків узагалі й циліндричних нанотрубок зокрема [1–9].

Якщо теорія електронного, діркового й фононного спектрів та взаємодії цих квазічастинок між собою у складних коаксіальних квантових дротах в основному створена [10–12], то послідовної теорії екситонного спектра, не кажучи про теорію екситон–фононної взаємодії, у таких системах поки що немає взагалі.

Відсутня й теорія екситонного спектра в нанотрубках, хоча недавно з'явилася праця [9], де експериментально отримано екситонний спектр у нанотрубці InP/InAs/InP та наведено перші теоретичні оцінки в межах найпростішої моделі.

Метою пропонованої статті є побудова послідовної теорії екситонного спектра у квантових нанотрубках, яка б урахувала в екситонному спектрі не лише адитивну суму електронних і діркових енергій, але й кулонівську взаємодію цих квазічастинок. Очевидна складність цієї задачі полягає в тому, що при побудові послідовної теорії доведеться враховувати аксіальну симетрію наносистеми і сферичну симетрію електрон–діркової взаємодії, яка є дуже важливою, оскільки саме вона забезпечує зв'язаний стан екситонного електрона й дірки між собою у квантовій нанотрубці.

ІІ. ГАМІЛЬТОНІАН І СПЕКТР ЕКСИТОНА В ЦИЛІНДРИЧНІЙ КВАНТОВІЙ ТРУБЦІ

Розглянуто наногетеросистему (рис. 1), яка складається з двох коаксіальних напівпровідникових циліндричних квантових дрітків, розташованих у зовнішньому середовищі. Уважається, що неузгодженість постійних ґраток та різниця діелектричних проникностей контактуючих середовищ настільки незначна, що

справджується модель ефективної маси і прямокутних потенціалів для електрона й дірки [12].

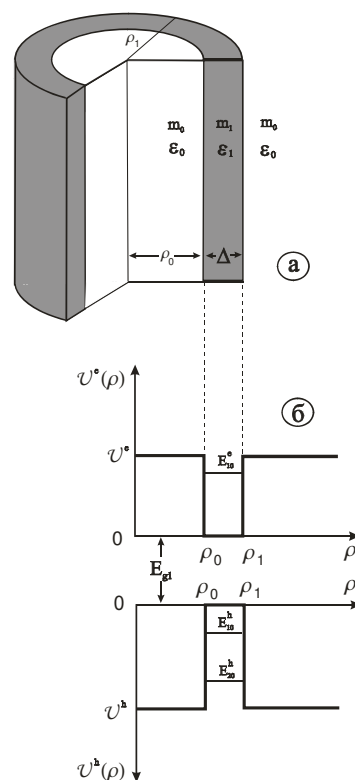


Рис. 1. Геометрична схема нанотрубки (а) та потенціальні енергії електрона й дірки (б).

Будемо вивчати експериментально реалізовану систему [9], у якій матеріальні параметри внутрішньої дротини й зовнішнього середовища однакові, а трубки — інші. При цьому потенціал електрона й дірки у трубці менший, ніж за нею, тобто вона є квантовою ямою для обох квазічастинок (рис. 1). Отже, ефективні маси, діелектричні проникності й потенціальні енергії електрона й дірки в усіх середовищах наносистеми вважаються відомими і в циліндричній системі координат із віссю OZ уздовж аксіальної осі наносистеми визначаються так:

$$m_{e,h} = \begin{cases} m_{e,h}^{(0)}, \\ m_{e,h}^{(1)}, \end{cases} \quad \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0, \\ \varepsilon_1, \end{cases} \quad v_{e,h}(\rho) = \begin{cases} v_{e,h}, & 0 \leq \rho_{e,h} \leq \rho_0, \quad \rho_1 \leq \rho_{e,h} < \infty, \\ 0, & \rho_0 \leq \rho_{e,h} \leq \rho_1. \end{cases} \quad (1)$$

Гамільтоніан взаємодіючих електрона й дірки в досліджуваній наносистемі з урахуванням ширини забороненої зони (E_{g1}) середовища трубки в циліндричній системі координат має вигляд

$$\hat{H} = E_{g1} - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_e(\rho_e)} \frac{\partial^2}{\partial z_e^2} + \nabla_{\rho_e} \frac{1}{m_e(\rho_e)} \nabla_{\rho_e} \right) + v_e(\rho_e) - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_h(\rho_h)} \frac{\partial^2}{\partial z_h^2} + \nabla_{\rho_h} \frac{1}{m_h(\rho_h)} \nabla_{\rho_h} \right) + v_h(\rho_h) + U(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h), \quad (2)$$

де всі позначення очевидні, а потенціальна енергія взаємодії електрона з діркою є такою:

$$U(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = -\frac{e^2}{\varepsilon(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) \sqrt{(z_e - z_h)^2 + (\rho_e - \rho_h)^2}}, \quad (3)$$

$(\mathbf{r}_{e,h} = \rho_{e,h} + z_{e,h} \mathbf{n}_z).$

Звичайно, знайти точний розв'язок стаціонарного рівняння Шредингера,

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = E\psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h), \quad (4)$$

неможливо, тому застосуємо такий наближений метод.

У просторі трубки, де, в основному, і буде рухатись екситон, перейдімо від змінних z_e, z_h до змінних у системі центра мас за співвідношеннями

$$Z = \frac{m_e^{(1)} z_e + m_h^{(1)} z_h}{m_e^{(1)} + m_h^{(1)}}, \quad z = z_e - z_h. \quad (5)$$

Тепер гамільтоніан (2) матиме вигляд

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{e^2}{\varepsilon(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) \sqrt{z^2 + (\rho_e - \rho_h)^2}} + \hat{H}_e(\rho_e) + \hat{H}_h(\rho_h), \quad (6)$$

де

$$M = m_e^{(1)} + m_h^{(1)}, \quad \mu = \frac{m_e^{(1)} m_h^{(1)}}{m_e^{(1)} + m_h^{(1)}} \quad (7)$$

— відповідно ефективна маса поперечної руху екситона як цілого та наведена маса внутрішнього руху електрона й дірки вздовж осі OZ .

Гамільтоніани $\hat{H}_e(\rho_e)$ та $\hat{H}_h(\rho_h)$ описують рух електрона й дірки у площині, перпендикулярній до осі OZ

$$\hat{H}_{e,h}(\rho_{e,h}) = -\frac{\hbar^2}{2} \nabla_{\rho_{e,h}} \frac{1}{m_{e,h}} \nabla_{\rho_{e,h}} + v_{e,h}(\rho_{e,h}). \quad (8)$$

Оскільки рух екситона здійснюється, в основному, в трубці, де можна вважати $\varepsilon(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) \approx \varepsilon_1$, то в цьому наближенні рух центра мас екситона вздовж осі OZ відділяється

$$\hat{H}_P \psi_P(z) = \frac{\hat{P}^2}{2M} \psi_P(z) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \psi_P(z) = E_P \psi_P(z) \quad (9)$$

так, що енергія (E_P) і хвильова функція $\psi_P(z)$ поперечної руху екситона будуть

$$E_P = \frac{P^2}{2M}, \quad \psi_P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iPZ/\hbar}. \quad (10)$$

Розв'язками рівнянь Шредингера для плоского руху невзаємодіючих між собою електрона і дірки,

$$\hat{H}_{e,h}(\rho_{e,h}) \psi_{n_{e,h} m_{e,h}}(\rho_{e,h}) = E_{n_{e,h} m_{e,h}}^\perp \psi_{n_{e,h} m_{e,h}}(\rho_{e,h}), \quad (11)$$

з урахуванням умов нормування й неперервності хвильових функцій та потоків їх густин визначаються самі ці функції

$$\psi_{n_{e,h} m_{e,h}}(\rho_{e,h}, \varphi_{e,h}) = \frac{e^{im_{e,h} \varphi_{e,h}}}{\sqrt{2\pi}} \psi_{n_{e,h} m_{e,h}}(\rho_{e,h}), \quad \left(\begin{array}{l} m_{e,h} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ n_{e,h} = 1, 2, \dots, \end{array} \right), \quad (12)$$

де $n_{e,h}, m_{e,h}$ — радіальні та магнетні квантові числа відповідно,

$$\psi_{n_{e,h} m_{e,h}}(\rho_{e,h}) = \begin{cases} R_{n_{e,h} m_{e,h}}^{(0)} = A_m^{(0)} I_m(\kappa_m^{(0)} \rho), & 0 \leq \rho_{e,h} \leq \rho_0, \\ R_{n_{e,h} m_{e,h}}^{(1)} = A_m^{(1)} J_m(\kappa_m^{(1)} \rho) + B_m^{(1)} N_m(\kappa_m^{(1)} \rho), & \rho_0 \leq \rho_{e,h} \leq \rho_1, \\ R_{n_{e,h} m_{e,h}}^{(2)} = B_m^{(2)} K_m(\kappa_m^{(0)} \rho), & \rho_1 < \infty, \end{cases} \quad (13)$$

$$\kappa_{m_{e,h}}^{(0)} = \sqrt{\frac{2m_{e,h}^{(0)}}{\hbar^2}(\mathcal{V} - E_{n_{e,h}m_{e,h}}^\perp)} \quad \kappa_{m_{e,h}}^{(1)} = \sqrt{\frac{2m_{e,h}^{(1)}}{\hbar^2}E_{n_{e,h}m_{e,h}}^\perp}. \quad (14)$$

Розв'язки дисперсійних рівнянь (індекси біля магнетних чисел для спрощення запису опущені),

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{k_m^{(1)}}{m^{(1)}} I_m(k_m^{(0)} \rho_0) J'_m(k_m^{(1)} \rho_0) - \frac{k_m^{(0)}}{m^{(0)}} I'_m(k_m^{(0)} \rho_0) J_m(k_m^{(1)} \rho_0)}{\frac{k_m^{(0)}}{m^{(0)}} I'_m(k_m^{(0)} \rho_0) N_m(k_m^{(1)} \rho_0) - \frac{k_m^{(1)}}{m^{(1)}} I_m(k_m^{(0)} \rho_0) N'_m(k_m^{(1)} \rho_0)} \\ &= \frac{\frac{k_m^{(1)}}{m^{(1)}} K_m(k_m^{(0)} \rho_1) J'_m(k_m^{(1)} \rho_1) - \frac{k_m^{(0)}}{m^{(0)}} K'_m(k_m^{(0)} \rho_1) J_m(k_m^{(1)} \rho_1)}{\frac{k_m^{(0)}}{m^{(0)}} K'_m(k_m^{(0)} \rho_1) N_m(k_m^{(1)} \rho_1) - \frac{k_m^{(1)}}{m^{(1)}} K_m(k_m^{(0)} \rho_1) N'_m(k_m^{(1)} \rho_1)}, \end{aligned} \quad (15)$$

визначають енергетичні рівні $E_{n_{e,h}m_{e,h}}^\perp$ електрона (дірки) у русі в площині, перпендикулярній до осі OZ .

Тепер у повному гамільтоніані системи (6) ще необхідно виділити енергію внутрішнього руху екситона вздовж z -ої осі. Як видно з третього доданка гамільтоніана (6), він є тим потенціалом, який зв'язує внутрішній рух екситона як уздовж осі Oz , так і в перпендикулярній до неї площині. Через складну залежність потенціалу не лише від z , а ще й від $|\rho_e - \rho_h|$, з ним неможливо точно розв'язати рівняння Шредингера для z -ої компоненти окремо. У зв'язку з цим скористаємось методом Бете, або, як цей підхід названо у книзі І. О. Вакарчука [13], "моделлю з малим параметром, створеним з нічого". Отже, у гамільтоніані (6) додамо й віднімемо потенціал

$$U(z) = -\frac{U_0}{ch^2(z/a)}, \quad U_0 = \frac{e^2}{\varepsilon_1 a} \quad (16)$$

з варіаційним параметром a . Такий потенціал, з одного боку, має основні властивості потенціалу взаємодії електрона й дірки, тому в сумі з кінетичною енергією z -ої компоненти він дасть енергію зв'язаного стану (E_n^{\parallel}), а з другого боку, в різниці з потенціалом електрон-діркової взаємодії він дасть уже досить малу величину в розумінні теорії збурень

$$\Delta U = \frac{U_0}{ch^2(z/a)} - \frac{e^2}{\varepsilon^{(1)} \sqrt{z^2 + (\rho_e - \rho_h)^2 + 4\rho_e \rho_h \sin^2(\varphi_e - \varphi_h)}}. \quad (17)$$

Отже, оскільки рівняння Шредингера

$$\hat{H}_{\parallel} \psi_n(z) = E_n^{(0)} \psi_n(z) \quad (18)$$

з гамільтоніаном

$$\hat{H}_{\parallel} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{U_0}{ch^2(z/a)} \quad (19)$$

має точний розв'язок [14] для енергії $E_n^{(0)}$

$$E_n^{(0)} = -\frac{\hbar^2 \varepsilon_n^2}{2\mu a^2}, \quad (20)$$

де

$$\varepsilon_n = 2S - \left(\frac{1}{2} + 2n\right), \quad S = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8}{\varepsilon^{(1)}} \frac{\mu}{m_0} \frac{a}{a_B}} + 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

та для хвильової функції

$$\begin{aligned} \psi_n(\xi) &= (1 - \xi^2)^{\varepsilon_n/2} \\ &\times F\left(\varepsilon_n - S, \varepsilon_n + S + 1, \varepsilon_n + 1, \frac{1 - \xi}{2}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

де $\xi = \text{th}(z/a)$, то гамільтоніан (6) уже можна подати у вигляді

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \widehat{\Delta U}, \quad (23)$$

де

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_P + \hat{H}_{\parallel} + \hat{H}_e + \hat{H}_h + E_{g1} \quad (24)$$

— основна частина, а $(\widehat{\Delta U})$ — збурення, що визначається формулою (17).

Тепер енергія екситона ($E^{(0)}(a, \mathcal{P})$) в нульовому наближенні, як функція варіаційного параметра a , дається виразом

$$E^{(0)}(a, \mathcal{P}) = E_n^{(0)}(a) + E_{n_e, m_e} + E_{n_h, m_h} + \frac{\mathcal{P}^2}{2M} + E_{g1}, \quad (25)$$

а хвильові функції

$$\psi_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, \mathcal{P}, a) = \psi_{\mathcal{P}}(Z) \psi_n(a, z) \psi_{n_e m_e}(\rho_e, \varphi_e) \psi_{n_h m_h}(\rho_h, \varphi_h) = \left| \begin{matrix} n_e m_e \\ n_h m_h \end{matrix} n \mathcal{P} \right\rangle \quad (26)$$

через $\psi_n(a, z)$ також залежать від параметра a .

Поправка ($\Delta E^{(0)}(a)$) до енергії внутрішнього руху екситона $E^{(0)}(a)$ знаходиться на хвильових функціях (25) як діагональний матричний елемент

$$\Delta E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, a) = \left\langle \begin{matrix} n_e m_e \\ n_h m_h \end{matrix} \left| \frac{U_0}{\text{ch}^2(z/a)} - \frac{e^2}{\varepsilon^{(1)} \sqrt{z^2 + (\rho_e - \rho_h)^2 + 4\rho_e \rho_h \sin^2(\varphi_e - \varphi_h)}} \right| \begin{matrix} n_e m_e \\ n_h m_h \end{matrix} n \right\rangle. \quad (27)$$

У результаті аналітичного розрахунку енергії внутрішнього позовжнього руху екситона (скорельованого взаємодією електрона й дірки) буде також функцією параметра a

$$\begin{aligned} E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, a) &= E_n^{(0)}(a) + \Delta E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, a) \\ &= E_n^{(0)}(a) + \Delta E_n(a) + \Delta E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, a), \end{aligned} \quad (28)$$

де

$$\Delta E_n(a) = U_0 \int_0^\infty |\psi_n(a, z)|^2 \text{ch}^{-2}(z/a) dz, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(a) &= -\frac{4}{\pi} U_0 a \int_0^\infty dz \int_0^\infty \rho_e d\rho_e \int_0^\infty \rho_h d\rho_h \int_0^{\pi/2} d\varphi \\ &\times \frac{|\psi_n(a, z)|^2 |\psi_{n_e m_e}(\rho_e)|^2 |\psi_{n_h m_h}(\rho_h)|^2}{\sqrt{z^2 + (\rho_e - \rho_h)^2 + 4\rho_e \rho_h \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Знайшовши значення \bar{a} , яке реалізує мінімум $E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, \bar{a}) = E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n)$, отримуємо кінцеві вирази для енергетичного спектра

$$\begin{aligned} E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, \mathcal{P}) &= E_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n) + E_{n_e m_e} \\ &+ E_{n_h m_h} + E_g^{(1)} + \frac{\mathcal{P}^2}{2M} \end{aligned} \quad (31)$$

і хвильових функцій

$$\begin{aligned} \psi_{n_h m_h}^{n_e m_e}(n, \mathcal{P}) &= \psi_{n_e m_e}(\rho_e, \varphi_e) \psi_{n_h m_h}(\rho_h, \varphi_h) \\ &\times \psi_n(z) \psi_{\mathcal{P}}(Z) \end{aligned} \quad (32)$$

екситона в циліндричній квантовій трубці.

Подальший розрахунок спектра й аналіз його властивостей виконується числовими методами для конкретних наногетеросистем з відповідними фізичними й геометричними параметрами.

III. АНАЛІЗ ЕКСИТОННОГО СПЕКТРА У КВАНТОВІЙ ТРУБЦІ

Розрахунок спектра і хвильових функцій екситона в циліндричній нанотрубці виконано для наносистеми InP/InAs/InP, яка отримана й експериментально

досліджена у праці [9], де основа квантової нанотрубки мала шестикутну форму. Фізичні параметри наносистеми такі. Ефективна маса електрона та дірки, відповідно, $m_e^{(0)} = 0.07 m_0$, $m_h^{(0)} = 0.6 m_0$ у середовищі InP; $m_e^{(1)} = 0.027 m_0$, $m_h^{(1)} = 0.41 m_0$ у середовищі InAs. Глибина потенціальної ями для електрона $\mathcal{U}_e = 330 \text{ meV}$, для дірки $\mathcal{U}_h = 520 \text{ meV}$. Сталі ґраток $a_{\text{InP}} = 0.5869 \text{ нм}$, $a_{\text{InAs}} = 0.5660 \text{ нм}$.

Щоб вияснити властивості екситонного спектра залежно від геометричних розмірів нанотрубки, за формулою (27) розраховано всі складники екситонної енергії. Результати розрахунку такі.

На рис. 2 наведено залежність варіаційного параметра a від величини ρ_0 при різних значеннях товщини шару — ями Δ , а на вкладці показано, що параметр a реалізує мінімум екситонної енергії ($E_{n_h m_h}^{n_e m_e} = 965.67 \text{ meV}$) при тих геометричних розмірах нанотрубки, які були в експерименті [9].

На рис. 3, а, б, в наведено залежність енергій ($E_{n, m}^{e, h}$) поперечного руху електрона (а) й дірки (б) та енергії $\Delta E_{n_h m_h}^{n_e m_e}$ зв'язку електрона й дірки від внутрішнього радіуса (ρ_0) нанотрубки при різних її товщинах Δ .

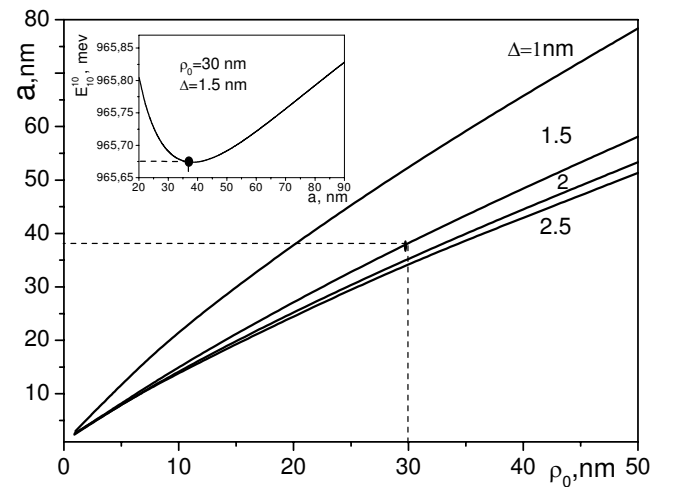


Рис. 2. Залежність параметра a від ρ_0 при різних значеннях Δ та залежність повної енергії екситона E_{10}^{10} від параметра a .

Із рис. 3 видно такі основні властивості спектра.

1. Зі зміною величини внутрішнього радіуса (ρ_0) нанотрубки, незалежно від величини Δ , основний енергетичний рівень змінює своє положення у шкалі енергій від того, яке він має у квантовому дроті радіуса Δ , до того, яке він має у плоскій плівці товщиною Δ . Цього, звичайно, і слід було чекати з фізичних міркувань.

2. Унаслідок того, що при збільшенні ширини ями Δ (однакової для нанотрубки і квантової плівки) основні рівні в нанотрубці і квантовій плівці опускаються з різною швидкістю (що видно з рисунка), то і картина еволюції електронного й діркового спектрів у ділянці малих ($\Delta \leq 10$ nm) і великих ($\Delta > 10$ nm) значень Δ суттєво різна.

3. У ділянці товщин нанотрубки $\Delta > 10$ nm положення основних рівнів електрона і дірки практично збігаються з їхніми значеннями у плоскій квантовій плівці.

Зі зменшенням величини Δ основні рівні обох ква-

зічастинок зміщуються в ділянку менших енергій і, проходячи через мінімум, далі наближаються до положення основних рівнів у квантовому дроті радіуса Δ , якщо вони розташовані над рівнями у квантовій плівці, або цей мінімум досягається при $\Delta \rightarrow 0$, якщо рівень у квантовому дроті розташований нижче від рівня у квантовій плівці.

На рис. 3, в наведено залежність енергії зв'язку екситона від величини внутрішнього радіуса (ρ_0) нанотрубки при різних значеннях її товщини Δ . Як видно, зменшення ρ_0 при $\Delta = \text{const}$ збільшує енергію зв'язку екситона, оскільки приводить до більшої його просторової локалізації. Абсолютна величина енергії зв'язку екситона при товщині трубки 1–5 nm на два порядки менша, ніж енергії $E_{10}^{e,h}$ електрона чи дірки, тому й залежність енергії основного екситонного стану (E_{10}^{10}) від геометричних параметрів нанотрубки, в основному, зумовлена особливостями поведінки енергій основних станів електрона і дірки, що видно з рис. 4.

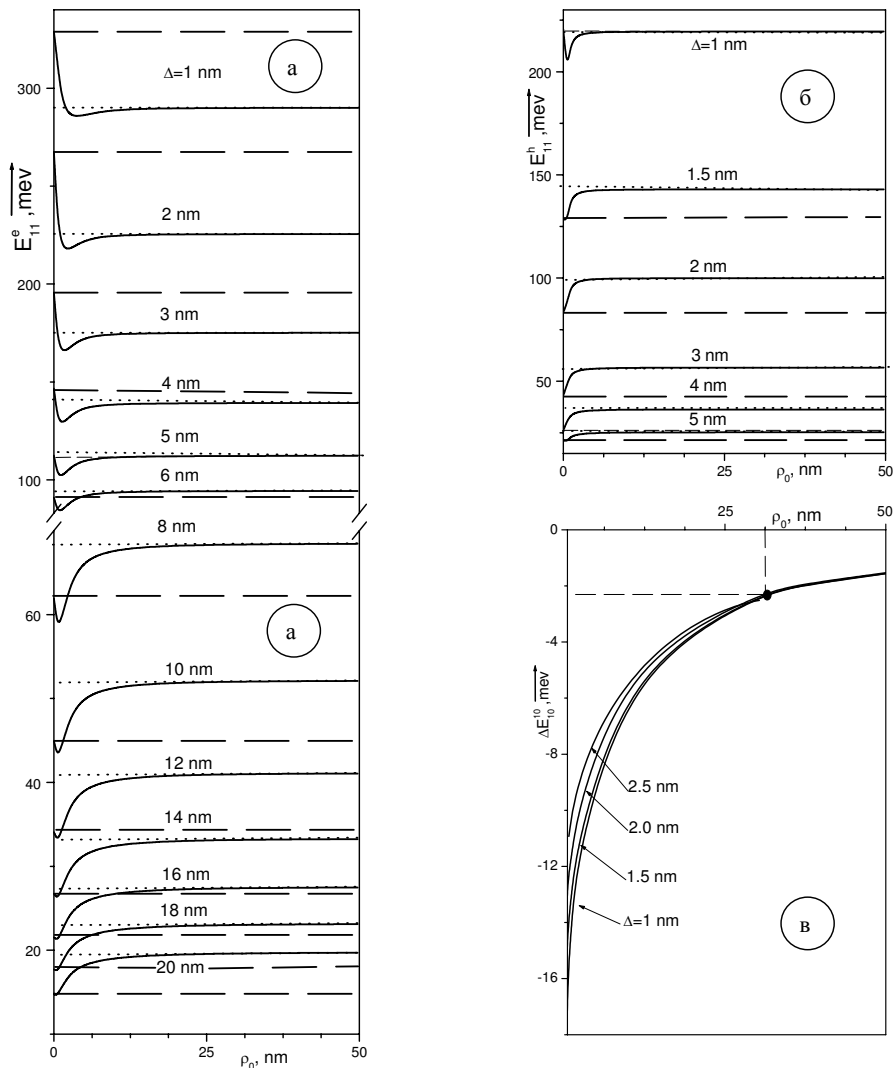


Рис. 3. Залежність складників екситонної енергії E_{10}^e (а), E_{10}^h (б), ΔE_{10}^{10} (в) від радіуса нанотрубки (ρ_0) при різних товщинах Δ .

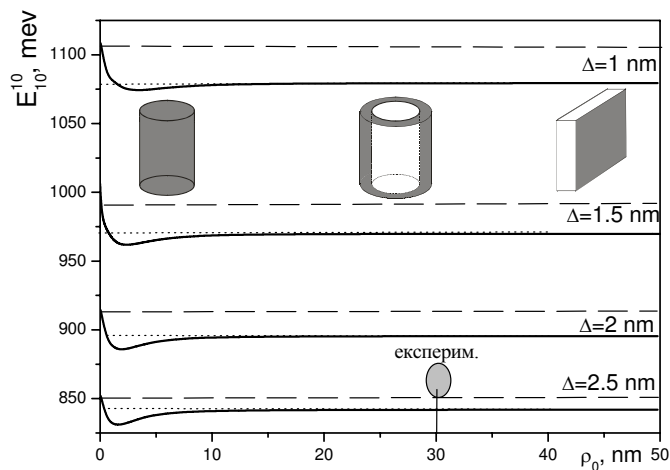


Рис. 4. Залежність енергії основного стану екситона E_{10}^{10} від радіуса нанотрубки (ρ_0) при різних значеннях її товщини Δ .

Із цього ж рисунка 4 видно, що теоретично розрахована величина екситонної енергії в нанотрубі товщиною $\Delta = 1, 5 \div 2, 5$ нм непогано узгоджується з експериментальним [9] положенням піка у шкалі енергій ($E_{\text{exp}} \sim 860 \text{ meV} \pm 40 \text{ meV}$).

Подальше точніше врахування геометричних ха-

рактеристик нанотрубки, електрон– та екситон–фононної взаємодій та взаємодії з різними домішками в теоретичній моделі, а також поліпшення експериментальних можливостей зі створення більш однорідних (особливо за розмірами) нанотрубок дає надію на добре узгодження теорії й експерименту.

-
- [1] L. J. Lauhon, M. S. Gudiksen, D. Wang, C. M. Lieber, *Nature* **57**, 420 (2002).
 - [2] S. Hara, J. Motohisa, J. Noborisaka, J. Takeda, T. Fukui, *Inst. Phys. Conf. Ser.* **184**, 393 (2005).
 - [3] F. Qian, S. Gradecak, Y. Li, C. Y. Wen, C. M. Lieber, *NanoLett.* **5**, 2287 (2005).
 - [4] P. Mohan, J. Motohisa, T. Fukui, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 013110 (2006).
 - [5] J. Noborisaka, J. Motohisa, T. Fukui, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 213102 (2005).
 - [6] P. Mohan, J. Motohisa, T. Fukui, *Nanotechnology* **16**, 2903 (2005).
 - [7] J. Motohisa, J. Noborisaka, J. Takeda, M. Inari, T. Fukui, *J. Cryst. Growth* **272**, 180 (2004).
 - [8] F. Qian, Y. Li, S. Gradecak, D. Wang, C. J. Barrelet, C. M. Lieber, *NanoLett.* **4**, 1975 (2004).
 - [9] P. Mohan, J. Motohisa, T. Fukui, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 133105 (2006).
 - [10] Н. В. Ткач, В. П. Жаркой, *Физ. техн. полупр.* **5**, 55 (1999).
 - [11] М. В. Ткач, О. М. Маханець, І. В. Проц, *Укр. фіз. журн.* **7**, 46 (2001).
 - [12] М. В. Ткач, *Квазічастинки у наногетеросистемах. Квантові точки та дроти* (Рута, Чернівці, 2003).
 - [13] І. О. Вакарчук, *Квантова механіка* (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2004).
 - [14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Наука, Москва 1989).

THE EXCITON SPECTRUM IN A CYLINDRICAL QUANTUM NANOTUBE

M. V. Tkach, O. M. Makhanets, A. M. Gryschuk
Fedkovych Chernivtsi National University,
 2, Kotsyubynskoho St., Chernivtsi, UA-58012, Ukraine
 e-mail: theorphys@chnu.cv.ua

A theory of the exciton spectrum in the cylindrical nanotube is proposed in the paper. The spectrum of bound exciton states in a nanotube is obtained in the framework of rectangular potentials and electron and hole effective masses within the Bethe method.

The energy of the exciton ground state calculated for the InP/InAs/InP nanosystem is in good correlation with experimental data.